

Делимость-3

07 июля

Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких натуральных чисел — наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из этих чисел. **Наибольший общий делитель (НОД)** нескольких натуральных чисел — наибольшее натуральное число, являющееся делителем каждого из этих чисел. Если НОД двух чисел равен 1, то они называются взаимно простыми.

Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида: для того, чтобы найти НОД двух чисел a и b , нужно выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = b q_1 + r_1$$

$$b = r_1 q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 q_4 + r_4$$

.....

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}$$

На каждом шаге предыдущий делитель делится с остатком на предыдущий остаток. Так продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге остаток не станет равен 0. Последний ненулевой остаток равен $\text{НОД}(a, b)$.

Теорема (о линейном представлении НОД). Для любых двух целых чисел a и b найдутся такие целые числа x и y , что $\text{НОД}(a, b) = ax + by$.

Свойства. 1. Если натуральные числа a и b поделить на их НОД, то полученные результаты будут взаимно простыми.

2. Если $(a, b) = 1$ и ac делится на b , то c делится на b .

3. $ab = \text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b)$

Пример. Найдите представление наибольшего общего делителя чисел 391 и 253 в виде $391u + 253v$ для некоторых целых чисел u и v .

$$\begin{array}{r} 1584231 \\ 637470 \end{array}$$

1. Сократите дробь $\frac{1584231}{637470}$.

2. Найдите представление наибольшего общего делителя чисел 117 и 92 в виде $117u + 92v$ для некоторых целых чисел u и v .

$$\text{НОД} \left(\underbrace{77 \cdot 7}_{100 \text{ цифр}}, \underbrace{77 \cdot 7}_{14 \text{ цифр}} \right)$$

3. Найдите а) $\text{НОД}(99! + 100!, 101! + 102!)$;

б) $\text{НОД}(99! + 100, 101!, 101! + 102)$.

4. Найдите пару натуральных чисел, если известно, что

а) их НОД равен 56, а НОК — 112; б) НОД равен 12, а НОК — 864.

5. Докажите, что следующие дроби несократимы при любом натуральном n :

$$\text{а) } \frac{2n^2 - 1}{n + 1} ; \text{ б) } \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1} ; \text{ в) } \frac{12n + 1}{30n + 2} .$$

6. Найдите все целые n , при которых сократима дробь а) $\frac{n^2 + 2n + 4}{n^2 + n + 3}$; б) $\frac{n^3 - n^2 - 3n}{n^2 - n + 3}$.

7. Натуральные числа m и n таковы, что $\text{НОД}(m, n) + \text{НОК}(m, n) = m + n$. Докажите, что одно из этих чисел делится на другое (и поймите, что обратное утверждение очевидно).

8. Про натуральное число n известно, что $\text{НОД}(1000, n) = 4$ и $\text{НОД}(1000, n + 1) = 5$. Чему равен $\text{НОД}(1000, n + 2)$?

9. Выбрали шесть натуральных чисел. Для каждой пары выписали ее НОД. Могли ли в результате быть выписанными числа 1, 2, ..., 15?

10. Дмитрий Николаевич записал Пете в тетрадь четыре различных натуральных числа. Для каждой пары этих чисел Петя нашёл их наибольший общий делитель. У него получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N , где $N > 5$. Какое наименьшее значение может иметь число N ?

11. Пусть n — натуральное число. Петя выбрал k различных натуральных чисел, не превосходящих n . Затем Вова выписал всех их попарные суммы. Оказалось, что среди выписанных чисел нет двух различных, одно из которых делится на другое. При каком наибольшем k такое могло произойти?
12. У Пети есть 1000 карточек, на каждой из которых написано два натуральных числа: одно синим цветом, другое — красным. Петя заметил, что если взять любые две карточки, то разность синих чисел на этих карточках не будет делиться на НОД красных чисел на этих карточках. Докажите, что сумма чисел, обратных к красным, не превосходит 1.
13. Найдите все натуральные числа n такие, что число $2^n - 2n$ — квадрат целого числа.